Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Sarah Hess
Moritz Schick
Sommersemester 2024

Übungen zur Vorlesung *Lineare Algebra II*

Blatt 11

Abgabe: Montag, den 08. Juli 2024, um 10:00 Uhr in dem Briefkasten Ihres Tutors oder Ihrer Tutorin auf F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen und versehen Sie sie mit Ihrem Namen und dem Namen Ihres Tutors / Ihrer Tutorin.

Aufgabe 11.1 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit geordneter Basis $\mathcal{B}$, $L \in \mathcal{L}(V,V)$ und $A := [L]_{\mathcal{B}}$. Beweisen Sie, dass $[\det(xI-A)^t](L) = \det[(xI-A)^t(L)]$ gilt.

(b) Sei $A := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n\times n}(K)$ eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

und folgern Sie $Char.Pol.(A) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_{ii})$.

Aufgabe 11.2 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum.

(a) Sei $\mathcal{B}$ eine geordnete Basis von W und $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in V$ $(n \in \mathbb{N})$ derart, dass $(\overline{\alpha_1},\ldots,\overline{\alpha_n})$ eine geordnete Basis von V/W ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}\cup\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ eine Basis von V bildet.

(b) Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ und W T-invariant. Zeigen Sie, dass W für alle $f \in K[x]$ bereits $f(T)$-invariant ist.

Erinnerung: Das *kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)* zweier Polynome f und g ist das (eindeutig bestimmte) Polynom h für das gilt

- h ist ein Vielfaches von f,
- h ist ein Vielfaches von g und
- h teilt jedes Polynom k, das sowohl ein Vielfaches von f als auch ein Vielfaches von g ist.

Aufgabe 11.3 (*4 Punkte*)

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $A := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_{n\times n}(K)$ mit $char.Pol.(A)(x) := x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_0 \in K[x]$. Beweisen Sie $\alpha_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ und $\alpha_0 = (-1)^n \det(A)$.

(b) Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $T \in \mathcal{L}(V,V)$ und $U_1, U_2 \subseteq V$ zwei T-invariante Unterräume sodass $U_1 + U_2 = V$. Bezeichne μ ferner das Minimalpolynom von T und μ_i das Minimalpolynom von T_{U_i} für $i = 1,2$. Beweisen Sie $\mu = kgV(\mu_1,\mu_2)$.

Aufgabe 11.4 (*4 Punkte*)

Ziel dieser Aufgabe ist ein alternativer Beweis der Rückrichtung von Satz 20.3.

Sei hierzu K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $T \in \mathcal{L}(V,V)$ sodass $Char.Pol.(T)$ in ein Produkt linearer Faktoren über K zerfällt.

(a) Sei $c \in K$ ein Eigenwert von T mit Eigenvektor $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$.
   (i) Zeigen Sie, dass $W := \{d\alpha \mid d \in K\}$ T-invariant ist.
   (ii) Bestimmen Sie $Char.Pol.(T_W)$ und folgern Sie, dass $Char.Pol.(\overline{T})$ in ein Produkt linearer Faktoren über K zerfällt.

(b) Folgern Sie induktiv die Existenz einer Basis $\mathcal{B}$ von V sodass $[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.